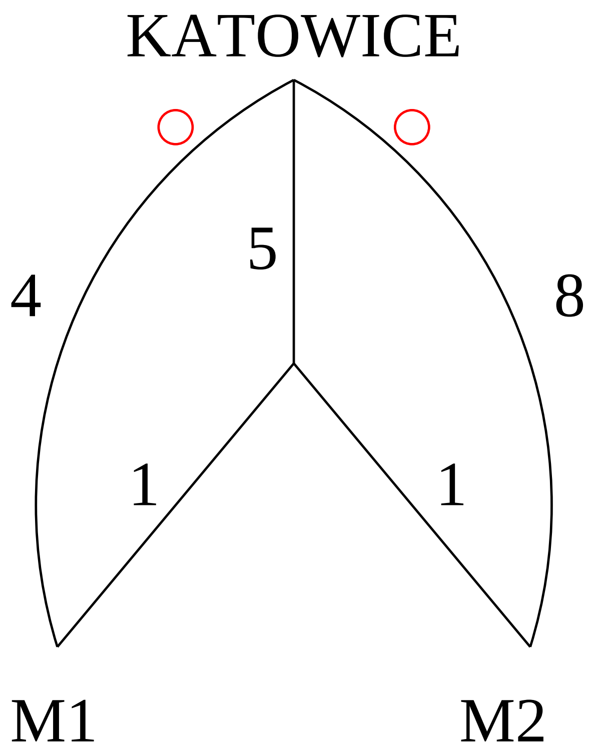
Teoria Gier i Korki Samochodowe

Krzysztof R. Apt

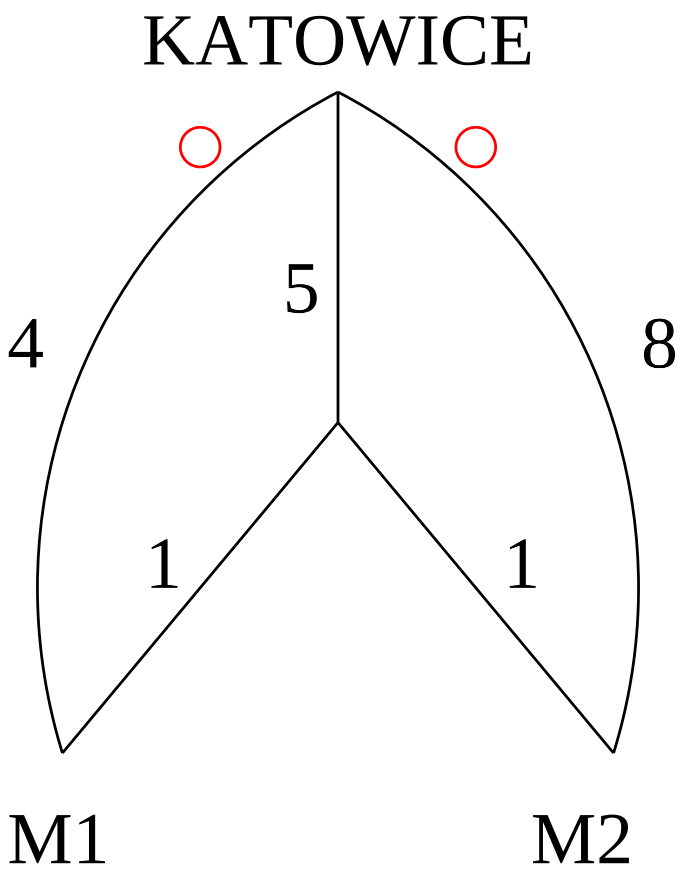
(absolwent z 1967 r.)

Przykład 1: Opłaty za Drogi

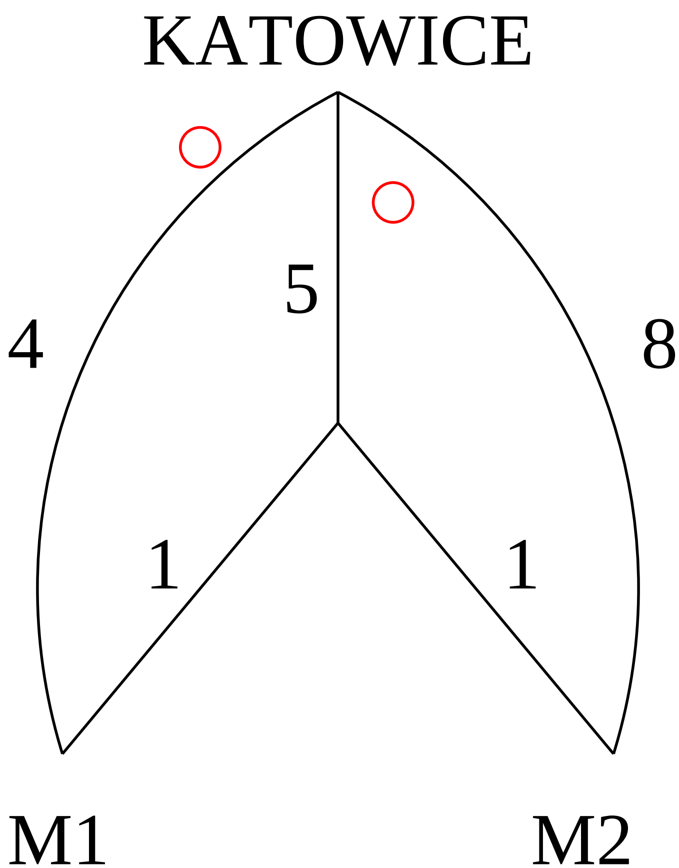
- Dwóch kierowców.
- Każdy kierowca wybiera drogę z Katowic do swojego magazynu.
- Więcej kierowców wybiera tę samą drogę: podział kosztów.



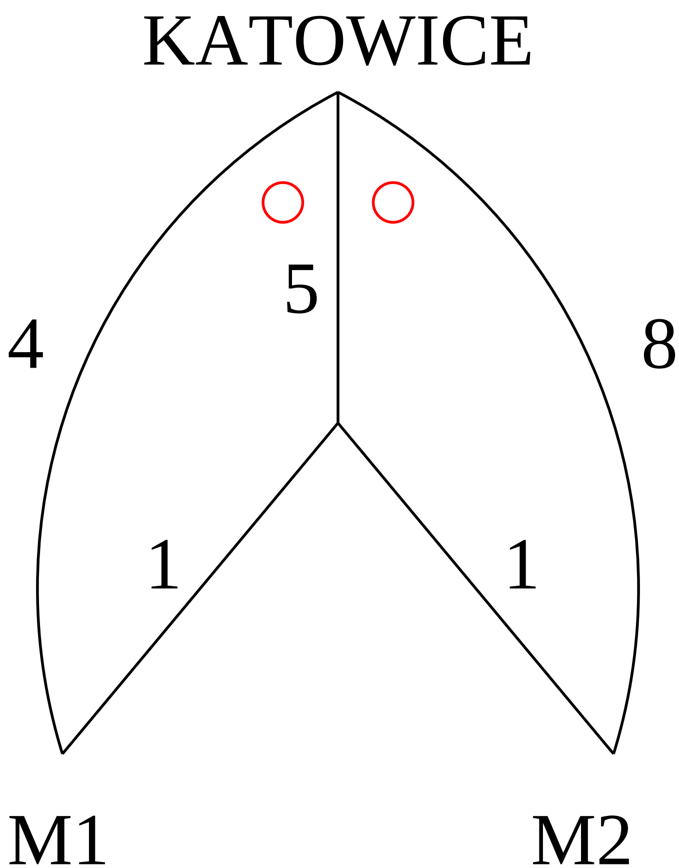
Możliwy Rozwój Wydarzeń (1)



Możliwy Rozwój Wydarzeń (2)



Możliwy Rozwój Wydarzeń (3)



Teraz obaj kierowcy są zadowoleni.

Trochę teorii (1)

Gra strategiczna dla 2 graczy:

- Każdy gracz ma pewien zbiór strategii.
- Każdy gracz chce zminimalizować swoje koszty.
- Obaj gracze wybierają swoje strategie jednocześnie.
- Następnie każdy gracz musi pokryć swoją część kosztów.

W naszym przykładzie (gry drogowe)

- 2 graczy.
- Każdy gracz ma 2 strategie.
- Koszty dla każdego gracza: koszt wybranej drogi. (Bierzemy pod uwagę podział kosztów.)

Równowaga Nasha (1)

Weźmy dowolną grę dla graczy 1 i 2.

- Strategia A gracza 1 jest najlepszą odpowiedzią na strategię B gracza 2 jeśli A minimalizuje koszty gracza 1 w stosunku do strategii B.
- Para (A, B) strategii graczy 1 i 2 jest równowagą Nasha jeśli
  A jest najlepszą odpowiedzią na B i
  B jest najlepszą odpowiedzią na A.
- Intuicja: w równowadze Nasha żaden z graczy nie żałuje swojego wyboru.

John Nash

Z Wikipedii:

”John Forbes Nash Jr (ur. 13 czerwca 1928). Amerykański matematyk i ekonomista. [...] Był współlaureatem nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii w 1994 roku. [...] Nash cierpiał na schizofrenię paranoidalną. [...] Historia jego życia została zekranizowana w 2001 roku w filmie *Piękny umysł* (*A Beautiful Mind*).”

Jak znaleźliśmy równowagę Nasha?

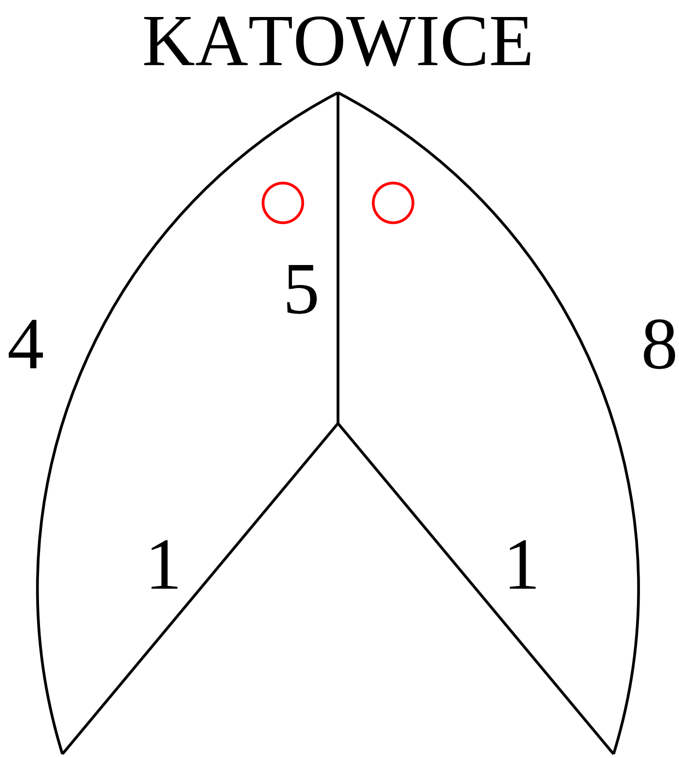
Dynamika najlepszej odpowiedzi ('Best response dynamics').

- Wybierz 'sytuację początkową': każdy gracz wybiera dowolną strategię.
- 'Niezadowolony' gracz może zmienić swój wybór wybierając najlepszą odpowiedź.
- Powtórz tę procedurę.
- Jeśli ta procedura się kończy to osiągnęliśmy równowagę Nasha.

Twierdzenie (Rosenthal, 1973) W grach drogowych dynamika najlepszej odpowiedzi zawsze prowadzi do równowagi Nasha.

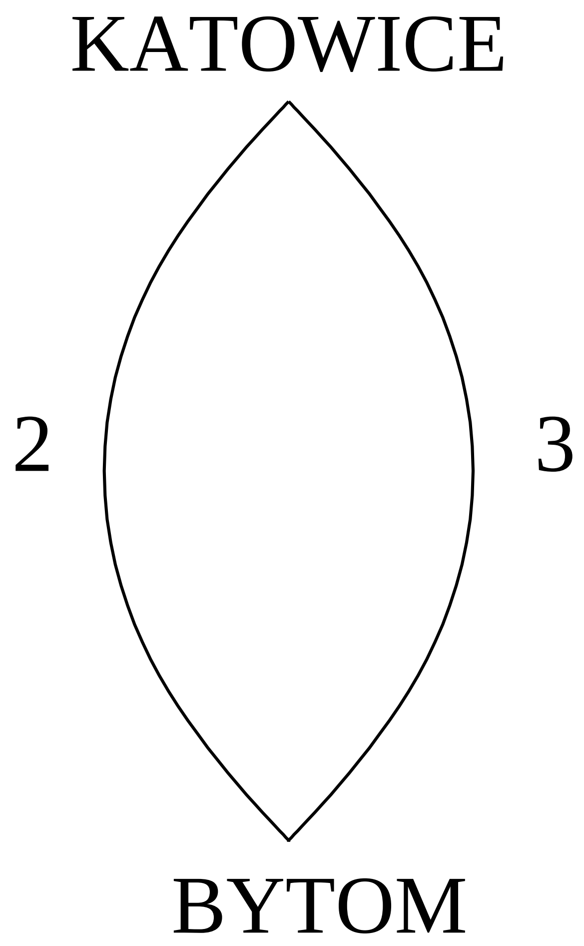
Społeczne Optimum (1)

- Społeczne optimum: kombinacja strategii graczy 1 i 2 która prowadzi do w sumie minimalnych kosztów.
- W naszym przykładzie równowaga Nasha była jednocześnie społecznym optimum.



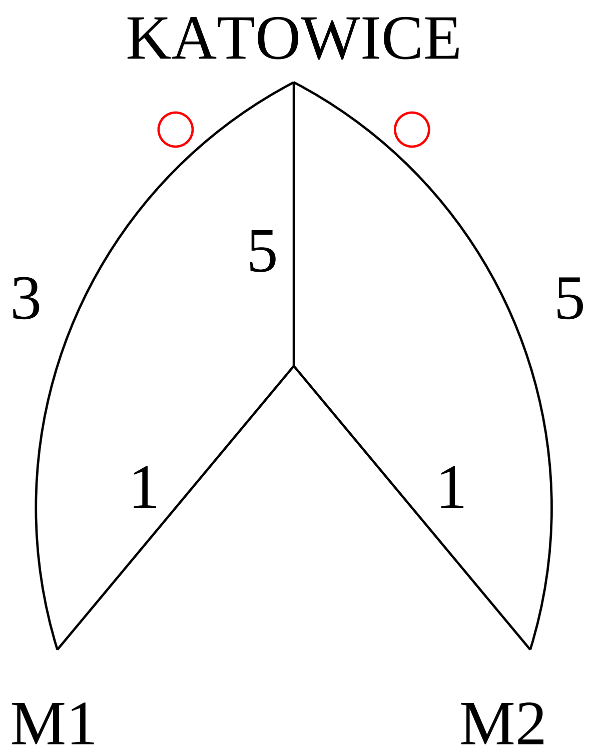
Wiele Równowag Nasha

Przykład



Społeczne Optimum (2)

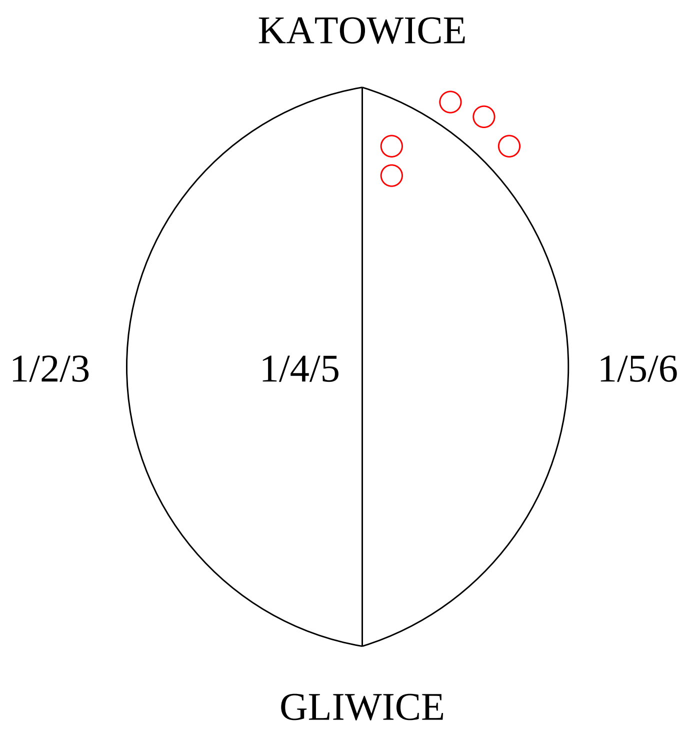
Inny przykład



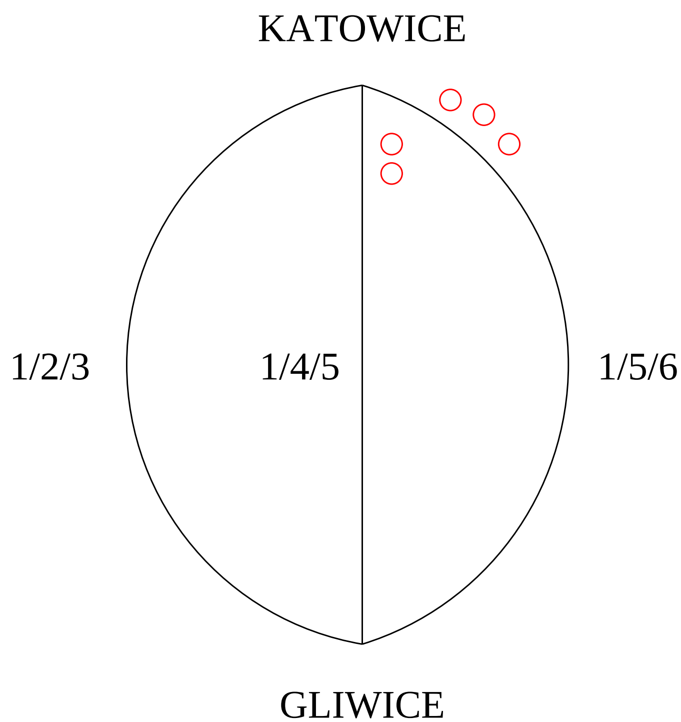
- Jedna równowaga Nasha, z kosztem 8.
- Koszt społecznego optimum: 7.

Przykład 2: Korki

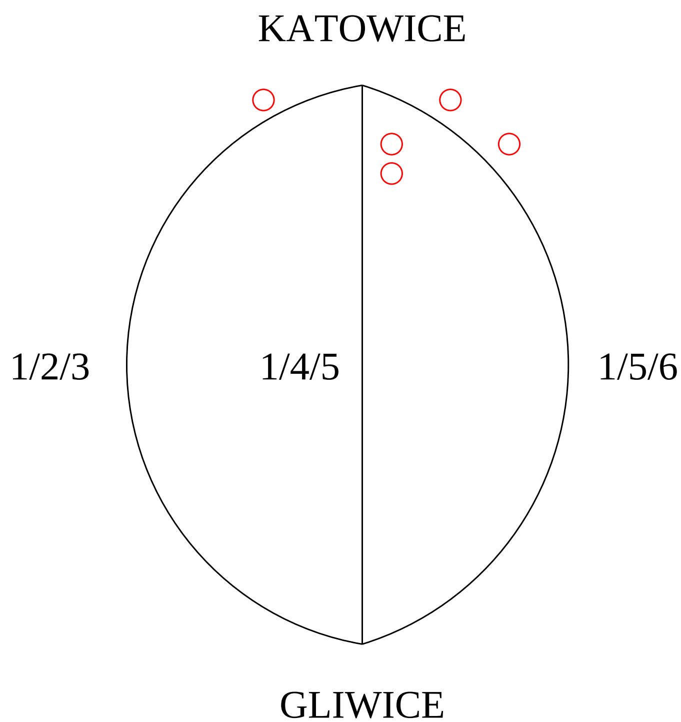
- 5 kierowców.
- Każdy kierowca wybiera drogę z Katowic do Gliwic,
- Więcej kierowców wybiera tę samą drogę: większe opóźnienia.



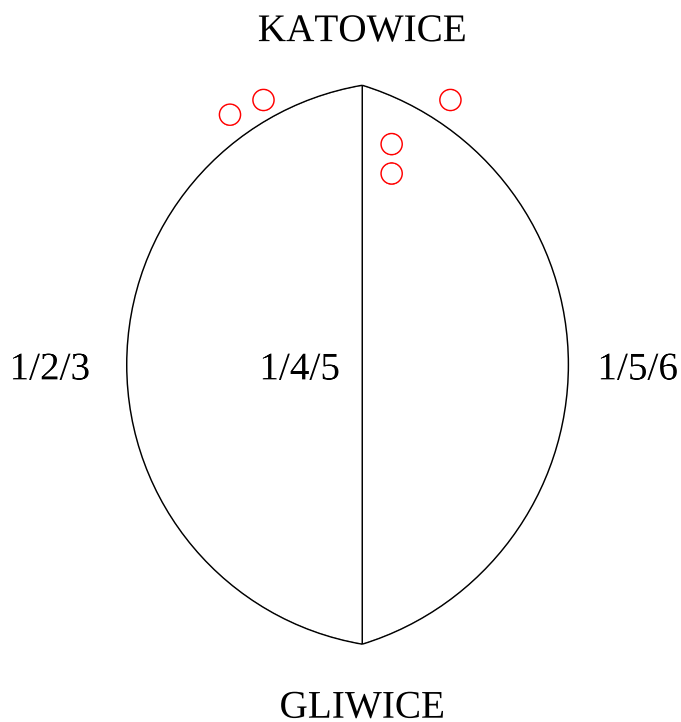
Możliwy Rozwój Wydarzeń (1)



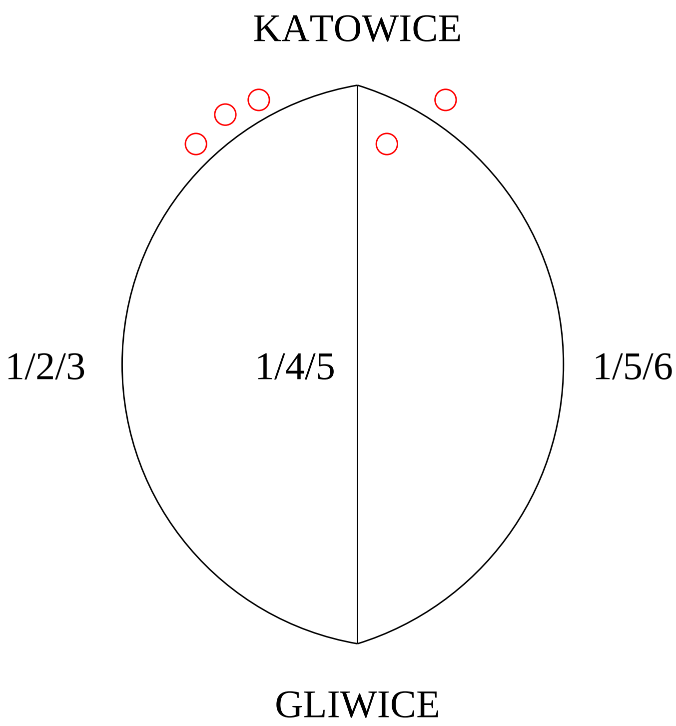
Możliwy Rozwój Wydarzeń (2)



Możliwy Rozwój Wydarzeń (3)



Możliwy Rozwój Wydarzeń (4)



Teraz każdy kierowca jest zadowolony.

Trochę teorii (2)

Gra strategiczna dla n graczy:

- Każdy gracz ma pewien zbiór strategii.
- Każdy gracz chce zminimalizować swoje koszty.
- Wszyscy gracze wybierają swoje strategie jednocześnie.
- Następnie każdy gracz musi pokryć swoje koszty.

W naszym przykładzie:

- 5 graczy.
- Każdy gracz ma 3 strategie.
- Koszty dla każdego gracza: jego czas jazdy.

Równowaga Nasha

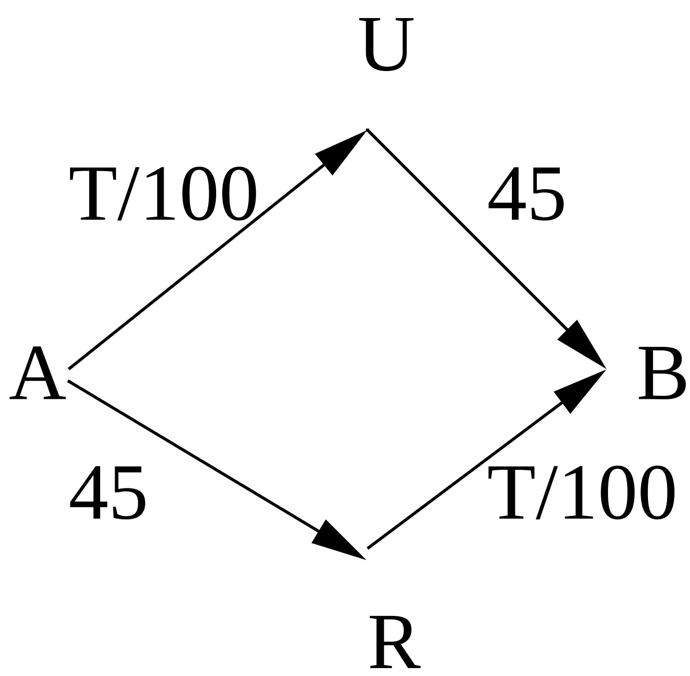
Weźmy jakąś grę.

- Załóżmy, że każdy gracz wybrał swoją strategię.
- Strategia gracza jest najlepszą odpowiedzią na wektor strategii przeciwników jeśli jest przynajmniej tak dobra jak każda inna strategia.
- Równowaga Nasha: kombinacja strategii graczy, w której każda strategia jest najlepszą odpowiedzią na wektor strategii przeciwników.
- Osiągnęliśmy równowagę Nasha przy użyciu dynamiki najlepszej odpowiedzi.
- Twierdzenie (Rosenthal, 1973) W grach sieciowych dynamika najlepszej odpowiedzi zawsze prowadzi do równowagi Nasha.

Inny Przykład

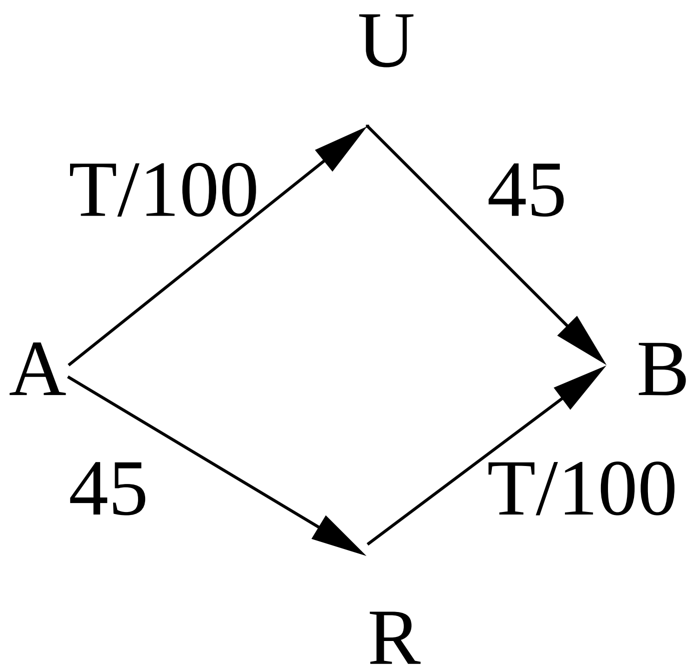
Założenia:

- 4000 kierowców jedzie z A do B.
- Każdy kierowca ma 2 możliwości (strategie).



Problem: Znajdź równowagę Nasha (T = liczba kierowców).

Równowaga Nasha

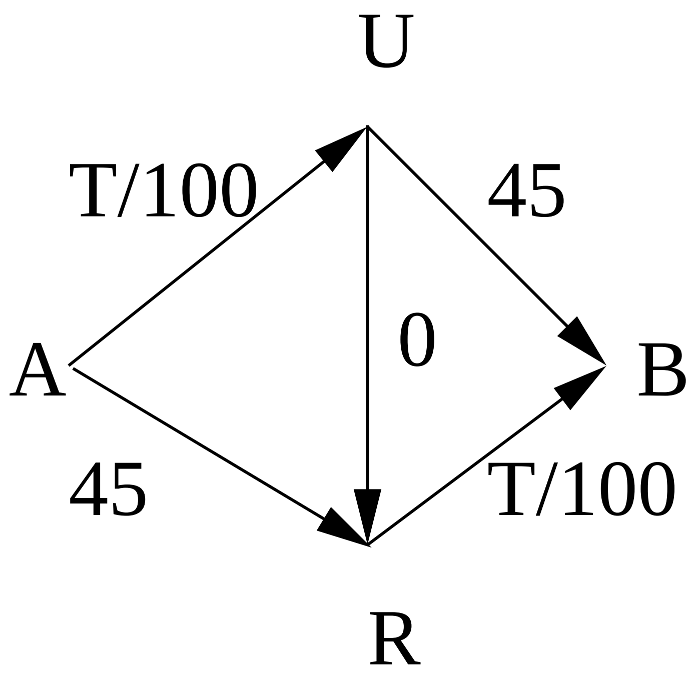


Odpowiedź: 2000/2000.

Czas jazdy: 2000/100 + 45 = 45 + 2000/100 = 65.

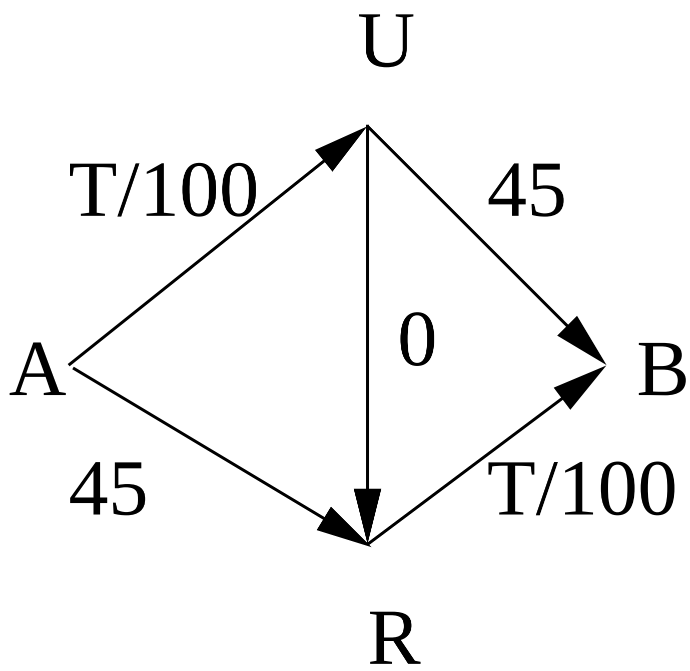
Paradoks Braessa

- Dodaj szybką drogę z U do R.
- Każdy kierowca ma teraz 3 możliwości (strategie):
  A - U - B,
  A - R - B,
  A - U - R - B.



Problem: Znajdź równowagę Nasha.

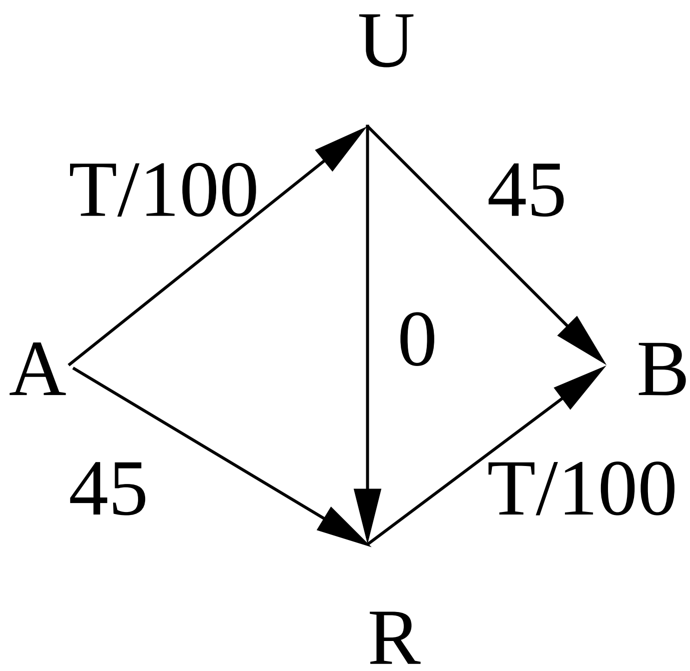
Równowaga Nasha



Odpowiedź: Każdy kierowca wybierze drogę A - U - R - B.

Dlaczego?: Droga A - U - R - B jest zawsze najlepszą odpowiedzią.

Mała komplikacja



Czas jazdy: 4000/100 + 4000/100 = 80!

Czy to się zdarza?

z Wikipedii ('Braess Paradox'):

- In Seoul, South Korea, a speeding-up in traffic around the city was seen when a motorway was removed as part of the Cheonggyecheon restoration project.
- In Stuttgart, Germany after investments into the road network in 1969, the traffic situation did not improve until a section of newly-built road was closed for traffic again.
- In 1990 the closing of 42nd street in New York City reduced the amount of congestion in the area.
- In 2008 Youn, Gastner and Jeong demonstrated specific routes in Boston, New York City and London where this might actually occur and pointed out roads that could be closed to reduce predicted travel times.

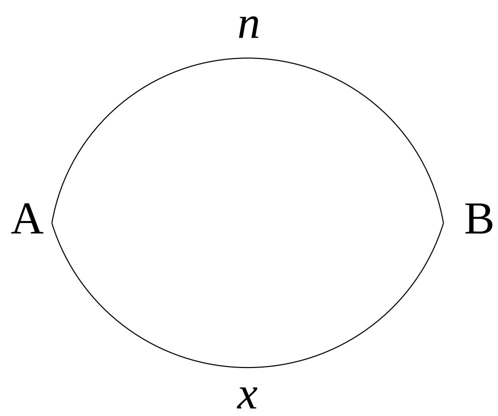
Cena Stabilności

Definicja

CS: $\dfrac{\text{koszty społeczne najlepszej równowagi Nasha}}{\text{społeczne optimum}}$

Pytanie: Ile wynosi CS dla gier drogowych i dla gier sieciowych?

Przykład



n - (parzysta) ilość graczy.

x - ilość kierowców na dolnej drodze.

- Dwie równowagi Nasha

  $1/(n-1)$, z kosztem społecznym $n+(n-1)^2$.

  $0/n$, z kosztem społecznym n^2.

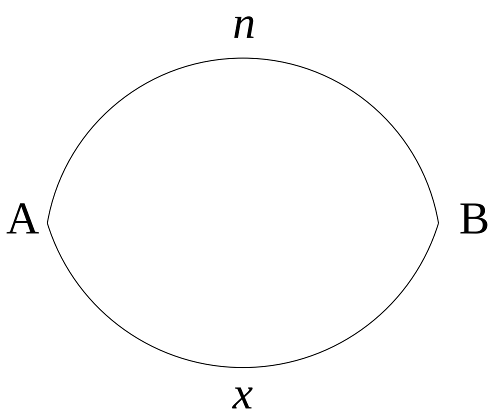
- Społeczne optimum

  Weźmy $f(x) = x \cdot x + (n-x) \cdot n = x^2 - n \cdot x + n^2$.

  Chcemy znaleźć minimum f.

  $f'(x) = 2x - n$, więc $f'(x) = 0$ jeśli $x = \frac{n}{2}$.

Przykład

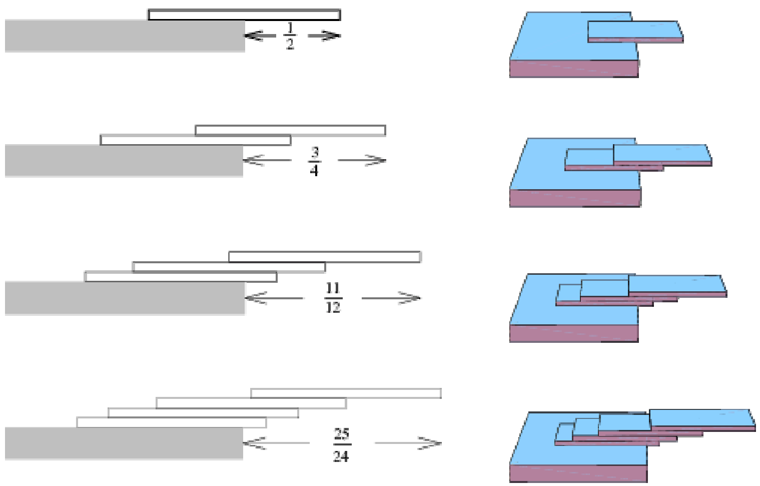


- Najlepsza równowaga Nasha
  $1/(n-1)$, z kosztem społecznym $n + (n-1)^2$.
- Społeczne optimum
  $f(x) = x^2 - n \cdot x + n^2$.
  Społeczne optimum = $f(\frac{n}{2}) = \frac{3}{4}n^2$.
- CS = $(n + (n-1)^2)/\frac{3}{4}n^2 = \frac{4}{3}\frac{n+(n-1)^2}{n^2}$.
- $\lim_{n\to\infty}$ CS = $\frac{4}{3}$.

Liczby Harmoniczne

- $H(n) = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$.
- Twierdzenie (Oresme, około 1350) Ciąg $H(n)$ jest rozbieżny.
- Twierdzenia (Euler, 1734) $\lim_{n \to \infty} H(n) - \ln(n) = \gamma$.

Problem: Zbuduj najdłuższą kładkę z książek:



Pytanie: Ile potrzeba książek by osiągnąć podwójną odległość?
Odpowiedź: najmniejsze n takie, że $\frac{1}{2}H(n) \geq 2$.
$\frac{1}{2}H(30) = 1.99749$, $\frac{1}{2}H(31) = 2.01362$.

Dowód Nicolas Oresme

$$\begin{array}{rl} & 1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+\ldots \\ = & 1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+\ldots \\ > & 1+1/2+(1/4+1/4)+(1/8+1/8+1/8+1/8)+\ldots \\ = & 1+1/2+\qquad 1/2 \qquad + \qquad\qquad 1/2 \qquad\qquad +\ldots \end{array}$$

Cena Stabilności

- Twierdzenie (Anshelevich et al, 2004)
CS dla gier drogowych dla n graczy jest $\leq H(n)$.
- Twierdzenie (Roughgarden en Tárdos, 2002)
Załóżmy, że funkcje opóźnień (n.p. $T/100$) są liniowe.
Wówczas CS gier sieciowych jest $\leq \frac{4}{3}$.
- Dobrą równowagę Nasha można osiągnąć przy użyciu dynamiki najlepszej odpowiedzi.
- Niestety: może zabrać wykładniczo długo zanim osiągniemy równowagę.

Otwarte Problemy

Przykład

Załóżmy, że funkcje opóźnień są wielomianowe (n.p. $T^2 + T/100$).

Ile wynosi wówczas CS dla gier sieciowych?

Literatura

- *Algorithm Design*, Jon Kleinberg and Éva Tardos, Addison-Wesley, 2006, pp. 690-700.
- *Networks, Crowds, and Markets*, David Easley and Jon Kleinberg, Cambridge University Press, 2010, pp. 239-253 (dostępna w internecie).

Dziękuję za uwagę